§ 32. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

32.1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$, где R — знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x; \cos x)\,dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, которая называется ***универсальной***.

Действительно, $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$. Поэтому

$$\int R(\sin x; \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t. Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он *всегда* приводит к результату.

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если функция $R(\sin x; \cos x)$ ***нечетна относительно*** $\sin x$, т. е. $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ рационализирует интеграл;

2) если функция $R(\sin x; \cos x)$ ***нечетна относительно*** $\cos x$, т. е. $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то делается подстановка $\sin x = t$;

3) если функция $R(\sin x; \cos x)$ ***четна относительно*** $\sin x$ *и* $\cos x$ $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$. Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$.

Пример 32.1. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение: Сделаем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} =$$

$$= \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C. \quad \bullet$$

Пример 32.2. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

○ Решение: Так как

$$R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{1+(-\sin x)^2} = \frac{1}{1+\sin^2 x} = R(\sin x; \cos x),$$

то полагаем $\operatorname{tg} x = t$. Отсюда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Поэтому

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \quad ●$$

32.2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) подстановка $\sin x = t$, если n — целое положительное *нечетное* число;

2) подстановка $\cos x = t$, если m — целое положительное *нечетное* число;

3) формулы понижения порядка: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, если m и n — целые *неотрицательные четные* числа;

4) подстановка $\operatorname{tg} x = t$, если $m+n$ — есть четное отрицательное целое число.

Пример 32.5. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x \, dx.$$

○ Решение: Здесь $m+n = -4$. Обозначим $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{(\sqrt{1+t^2})^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3}\, dt = \int t^{-3}\, dt + \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg} x| + C. \quad ●$$

32.3. Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int \sin ax \cdot \cos bx \, dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx \, dx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

Пример 32.6. Найти интеграл $I = \int \sin 8x \cos 2x\,dx$.

Решение:

$$I = \int \sin 8x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 10x + \sin 6x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{10}\cos 10x - \frac{1}{6}\cos 6x\Big) + C. \quad \bullet$$

§ 33. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

33.1. Квадратичные иррациональности

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции.

Интегралы типа

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\qquad \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,\qquad \int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей. Их можно найти следующим образом: под радикалом выделить полный квадрат

$$ax^2+bx+c =$$
$$= a\Big(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\Big) = a\Big(\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\Big) = a\Big(\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\Big)$$

и сделать подстановку $x+\frac{b}{2a} = t$. При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий — к сумме двух табличных интегралов.

Пример 33.2. Найти интеграл $I = \int\frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}\,dx$.

Решение: Так как $6-2x-x^2 = -(x^2+2x-6) = -((x+1)^2-7) = 7-(x+1)^2$, то подстановка имеет вид $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$. Тогда

$$I = \int\frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}}\,dt = \int\frac{t\,dt}{\sqrt{7-t^2}} + 3\int\frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int(7-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(7-t^2) + 3\int\frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2-t^2}} =$$
$$= -\sqrt{7-t^2} + 3\cdot\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} + C = 3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}} - \sqrt{6-2x-x^2} + C. \quad \bullet$$

33.2. Дробно-линейная подстановка

Интегралы типа $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right) dx$, где a, b, c, d — действительные числа, $\alpha, \beta, \ldots, \delta, \gamma$ — натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta}, \ldots, \frac{\delta}{\gamma}$.

Действительно, из подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ следует, что $x = \frac{b-dt^k}{ct^k-a}$ и $dx = \frac{-dkt^{k-1}(ct^k-a)-(b-dt^k)ckt^{k-1}}{(ct^k-a)^2}\,dt$, т. е. x и dx выражаются через рациональные функции от t. При этом и каждая степень дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ выражается через рациональную функцию от t.

Пример 33.4. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}}$.

Решение: Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ есть 6. Поэтому полагаем $x+2=t^6$, $x=t^6-2$, $dx=6t^5\,dt$, $t=\sqrt[6]{x+2}$.

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
I = \int \frac{6t^5\,dt}{t^4-t^3} = 6\int \frac{t^2\,dt}{t-1} = 6\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}\,dt = \\
= 6\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right) dt = 3t^2+6t+6\ln|t-1|+C = \\
= 3\cdot\sqrt[3]{x+2}+6\cdot\sqrt[6]{x+2}+6\ln|\sqrt[6]{x+2}-1|+C.
\end{aligned}
$$

33.3. Тригонометрическая подстановка

Интегралы типа

$$\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx, \quad \int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx, \quad \int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$$

приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью следующих *тригонометрических подстановок*: $x = a\cdot\sin t$ для первого интеграла; $x = a\cdot\operatorname{tg} t$ для второго интеграла; $x = \frac{a}{\sin t}$ для третьего интеграла.

Пример 33.6. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$.

Решение: Положим $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\,dt$, $t = \arcsin\frac{x}{2}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
I = \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int \frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}\,dt = \\
= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C = \\
= C - \arcsin\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = C - \arcsin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}
\end{aligned}
$$

33.4. Интегралы типа $\int R(x; \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Здесь подынтегральная функция есть рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку $x + \frac{b}{2a} = t$, интегралы указанного типа приводятся к интегралам уже рассмотренного типа, т. е. к интегралам типа $\int R(t; \sqrt{a^2-t^2})\,dt$, $\int R(t; \sqrt{a^2+t^2})\,dt$, $\int R(t; \sqrt{t^2-a^2})\,dt$. Эти интегралы можно вычислить с помощью соответствующих тригонометрических подстановок.

Пример 33.7. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^3}\,dx$.

○ Решение: Так как $x^2+2x-4 = (x+1)^2-5$, то $x+1=t$, $x=t-1$, $dx = dt$. Поэтому $I = \int \frac{\sqrt{t^2-5}}{t^3}\,dt$. Положим $t = \frac{\sqrt{5}}{\sin z}$, $dt = \frac{-\sqrt{5}\cdot\cos z}{\sin^2 z}\,dz$, $z = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
I = \int \frac{\sqrt{\frac{5}{\sin^2 z}-5}}{\frac{5\sqrt{5}}{\sin^3 z}} \cdot \frac{(-\sqrt{5})\cos z}{\sin^2 z}\,dz = -\frac{1}{\sqrt{5}} \int \cos^2 z\,dz =\\
= -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\int (1+\cos 2z)\,dz = -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(z + \frac{1}{2}\sin 2z\right) + C =\\
= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{t} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}\right)\right) + C =\\
= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}\right)\right) + C =\\
= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^2}\right) + C.
\end{aligned}
$$
●

Замечание: Интеграл типа $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ целесообразно находить с помощью подстановки $x = \frac{1}{t}$.